АГ Иванов - заместник 13.11.12

$\bar{R}^2 = R^2 \cup \Omega_1$ - разширена евклидова равнина
Ω_1 - безкрайна права в равнината
$\bar{R}_3 = R_3 \cup \Omega_2$ - разширено евклидово пространство

Т|
Ако $M_1 \neq M_2$, от които поне едината е крайна, то по формулата $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ при $(\lambda_1 \lambda_2) \neq (00)$ - (хомогенни координати) - се получават всички точки от правата $M_1 M_2$ и само те

С $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ - параметрично задаване на $M_1 M_2$ в $\bar{R}_3$ (същата формула важи и в $\bar{R}_2$

Бележка към доказателство
$g: \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{p} \end{cases}$ то $M = M_0 + t\vec{p}$
(хомогенни координати)

Доказателство
Нека е дадена $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ и да се докаже че $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow M = M_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} M_2$

$M_1 = M_0 + \alpha_1 t\vec{p}$ $\alpha_1 \neq \alpha_2$
$M_2 = M_0 + \alpha_2 t\vec{p}$

заместваме

$$M = M_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} M_2 = M_0 + \alpha_1 t\vec{p} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left[M_0 + \alpha_2 t\vec{p}\right] =$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} M_0 + \frac{\lambda_2 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2}{\lambda_1} t\vec{p}$$

1) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow M = (\alpha_1 - \alpha_2) t\vec{p} \Rightarrow M = t_q \in \bar{q} = \overline{M_1 M_2}$

(1)

2) $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow M = M_0 + \vec{\mu} \vec{Up} \Rightarrow M \in g$

В $\overline{R_2}$ т $M(x,y)$ - некоординати координати

$M(x,y,t)$ - хомогенни координати

$\frac{x}{t} = X \quad , \quad \frac{y}{t} = Y \longrightarrow t \neq 0$

при $t = 0 \Rightarrow M(x,y,0) = \vec{Up}(x,y)$

Инцидентност и неинцидентност в $\overline{R_3}$

Деф

Казваме че т.М и правата g са инцидентни и пишем $(M \geq g, g \geq M)$ когато:

а) ако М е крайна и g е крайна то $M \in g$



б) ако М е безкрайна и g е крайна то всеки представител на $M \in \| g$ (g е представител на М)

$(U_g = \{h \mid h \| g$ или $h = g\})$

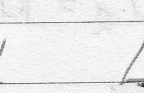
всеки h се нарича представител на U_g

в) М безкрайна и g е безкрайна

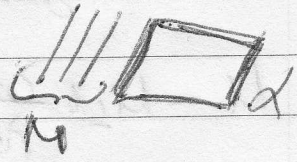
Деф

Казваме че т.М и равнината α са инцидентни $(M \geq \alpha, \alpha \geq M)$ когато

а) М - крайна и α - крайна то $M \in \alpha$



б) М - безкрайна и α - крайна то всеки представител на $M \in \| \alpha$



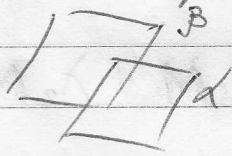
в) М - безкрайна и α - безкрайна т.е.

$\alpha \equiv \Omega_2$

Деф

Казваме че правата q и равнината α са инцидентни, когато

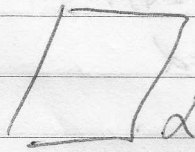
а) q и α са крайни то $q \in \alpha$ 

б) q - безкрайна права от β и α - крайна
то $\beta \parallel \alpha$ 

в) q е безкрайна и α - безкрайна

Деф
Казваме че т. (крайна или безкрайна) $M_1 M_2 M_3$ са колинеарни, ако са инцидентни с една права (крайна или безкрайна) в $\overrightarrow{R_3}$

Нека α - крайна равнина



$\vec{p_1}(a_1 b_1)$ $\quad \vec{p_1} \nparallel \vec{p_2}$
$\vec{p_2}(a_2 b_2)$

$\forall \vec{q} \neq \vec{0}$, $\vec{q} = \lambda_1 \vec{p_1} + \lambda_2 \vec{p_2}$

Ако $\vec{q}(x y)$ то $\Rightarrow$

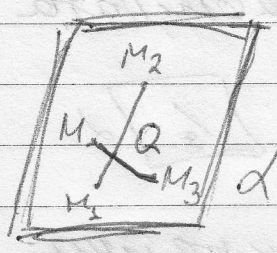
$$\begin{cases} x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ 0 = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 \end{cases}$$

$U\vec{q} = \lambda_1 U\vec{p} + \lambda_2 U\vec{p_2}$ $\quad (\lambda_1 \lambda_2) \neq (00) \Rightarrow$

$\forall$ безкрайна точка в равнината α се задава чрез $U\vec{q} = \lambda_1 U\vec{p_1} + \lambda_2 U\vec{p_2}$

Параметрично задаване на крайна равнина в $\overrightarrow{R_3}$

$\alpha : \begin{cases} \supset M_1 \\ \supset M_2 \\ \supset M_3 \end{cases}$ $M_1M_2M_3$ – неколинеарни точки една от които е крайна



Нека $\forall M \in \alpha$, $M \neq M_3$

$M_1M_2 \cap MM_3 = Q$

$\forall Q : Q = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$

$\forall M : M = \mu_1 Q + \mu_2 M_3$ $\Big\} \Rightarrow$

$$M = \mu_1(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) + \mu_2 M_3 = \underbrace{\mu_1\lambda_1}_{\gamma_1} M_1 + \underbrace{\mu_1\lambda_2}_{\gamma_2} M_2 + \underbrace{\mu_2}_{\gamma_3} M_3 =$$

$$\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3 \quad ((\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \neq (000)) \Rightarrow$$

$$\forall M \in \alpha \Rightarrow M = \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3 \quad ((\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \neq (000))$$

обратно

Нека е в сила $M = \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3$ при условие $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \neq (000)$. Ако $\gamma_2 = \gamma_3 = 0 \Rightarrow \gamma_1 \neq 0 \Rightarrow M \equiv M_1 \in \alpha$. Ако $(\gamma_2\gamma_3) \neq (00) \Rightarrow M = \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3 \in \alpha$

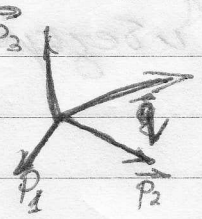
$\Rightarrow M = \gamma_1 M_1 + N \in MN \subset \alpha \Rightarrow M \in \alpha$

Доказахме I

Ако крайната равнина α е зададена с три свои неколинеарни точки $M_1M_2M_3$ то уравнението $M = \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3$ при $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \neq (000)$ ни задава всички точки (крайни и безкрайни) от равнината и само тях (хомогенни координати)

$M = \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3$ е параметрично задаване на крайна равнина в $\overline{R_3}$

Ако $\vec{p}_1(a_1 b_1 c_1)$, $\vec{p}_2(a_2 b_2 c_2)$, $\vec{p}_3(a_3 b_3 c_3)$
(некомпланарни)



то $\forall \vec{q}(x,y,z) \neq \vec{0} \Rightarrow$

$$\vec{q} = \lambda_1 \vec{p}_1 + \lambda_2 \vec{p}_2 + \lambda_3 \vec{p}_3$$

$$U_{\vec{q}} = \lambda_1 U_{\vec{p}_1} + \lambda_2 U_{\vec{p}_2} + \lambda_3 U_{\vec{p}_3}$$

$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \neq (000)$

параметрично представяне на Ω_2

Общо уравнение на права и равнина в хомогенни координати

$\varepsilon: aX + bY + cZ + d = 0$ - общо уравнение на права равнина ε в нехомогенни координати

$(a\,b\,c) \neq (000)$

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t} \Rightarrow$$

$$\varepsilon: a\frac{x}{t} + b\frac{y}{t} + c\frac{z}{t} + d = 0 \quad / \cdot t \Rightarrow$$

$\varepsilon_{\text{хом}}: ax + by + cz + dt = 0$
уравнение в хомогенни координати

II

Всяка равнина ε в $\overline{R_3}$ се задава с уравнение от вида $\varepsilon: ax + by + cz + dt = 0$ при $(a\,b\,c\,d) \neq (0000)$

обратно

Всяко уравнение от вида $\varepsilon: ax + by + cz + dt = 0$ при $(a\,b\,c\,d) \neq (0000)$ е уравнение на точно една равнина в $\overline{R_3}$. Ако $(a\,b\,c) \neq (000)$ то равнината е крайна

Ако само $d \neq 0$ то равнината е безкрайна
При това $\varepsilon: ax+by+cz+dt=0$ се удовлетворява от координатите на всички крайни и безкрайни точки на равнината

Док-во
Ако $\varepsilon: aX+bY+cZ+d=0$ е крайна равнина то $X=\frac{x}{t}$, $Y=\frac{y}{t}$, $Z=\frac{z}{t}$ $\Rightarrow \varepsilon: ax+by+cz+dt=0$
$(abc) \neq (000)$ ако ε е безкрайна равнина то $\Omega_2 = \varepsilon$ т.е. $\Omega_2: t=0$

Нека е дадено $\varepsilon: ax+by+cz+dt=0$ при условие $(abcd) \neq (0000)$. Ако $(abc) \neq (000)$ то $\varepsilon: ax+by+cz+dt=0$ е уравнение на крайната равнина $\varepsilon: aX+bY+cZ+d=0$

$\vec{p}(\lambda M 0) \neq \vec{0}$; $U\vec{p}(\lambda M \gamma 0)$
$U\vec{p} \in \alpha \Leftrightarrow \vec{p} \parallel \alpha \Leftrightarrow \lambda a + M b + \gamma c + 0d = 0$
ако $(abc)=(000) \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow \varepsilon: ax+by+cz+dt=0$
сама върху $t=0$ т.е. $\varepsilon \equiv \Omega_2$

Аналогично в $\bar{R}_2$:

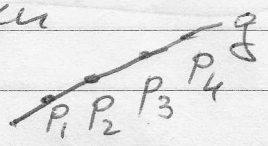
Т1
Всяка права в $\bar{R}_2$ се задава с уравнение от вида $g: ax+by+ct=0$, $(abc) \neq (000)$

обратно
Всяко уравнение от вида $g: ax+by+ct=0$ при условие $(abc) \neq (000)$ е уравнение на точно една права в разширената евклидова равнина $(\bar{R}_2)$

Ако $(a,b) \neq (0,0)$ то правата е крайна
Ако само $c \neq 0$ то g е безкрайната права
$(g \equiv \Omega_1)$
При това $g: ax+by+ct=0$ се удовлетворява от хомогенните координати на всички крайни и безкрайни точки върху g

Двойно отношение на четири точки върху права

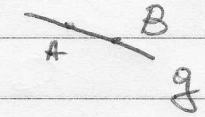
Нека g - права (крайна или безкрайна) и $P_1 P_2 P_3 P_4$ са 4 различни точки
$P_1 P_2 P_3 P_4 \in g$



$\exists (\lambda_1 \lambda_2) \neq (0,0)$ т.с. $P_3 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$
$\exists (\mu_1 \mu_2) \neq (0,0)$ т.с. $P_4 = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$

Деф
Двойно отношение на наредената четворка $P_1 P_2 P_3 P_4$ е δ и се означава $\delta = (P_1 P_2 P_3 P_4)$

Нека $A \neq B$, $AB \in g$



$P_s = \alpha_s A + \beta_s B$, $s = 1,2,3,4$
$\alpha_s \beta_s$ - числа $(\alpha_s \beta_s) \neq (0,0)$

$$(st) = \begin{vmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \alpha_t & \beta_t \end{vmatrix} = \alpha_s \beta_t - \alpha_t \beta_s$$

$(ss) = 0$ $\quad (st) = -(ts)$
$(12)(34) + (23)(14) + (31)(24) = 0$ за упр

Теб
$$\delta = (P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(13)}{(23)} : \frac{(24)}{(14)}$$

Лин-во

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B \\ P_2 = \alpha_2 A + \beta_2 B \end{array}\right\} \Rightarrow$$ по Крамер

$$A = \frac{\beta_2}{(12)} P_1 - \frac{\beta_1}{(12)} P_2$$

$$B = -\frac{\alpha_2}{(12)} P_1 + \frac{\alpha_1}{(12)} P_2$$

